

尋找公司總部和倉庫的最佳位置

學習階段： 3

學習範疇： 度量、圖形與空間範疇

學習單位： 直角坐標系
三角形的心
探索與研究

目標： (i) 豐富學生在現實問題中應用中點公式、距離公式和三角形的心進行解難的經驗
(ii) 提升學生在建模中作出假設和運用數學概念的能力
(iii) 運用數學軟件創造虛擬模型

先備知識： (i) 理解中點公式
(ii) 理解畢氏定理和距離公式
(iii) 對三角形的心有基本認知

教學資源： 配有 GeoGebra 或網路連線的桌上型電腦或平板電腦

背景資料：

尋找建築物（例如總部、倉庫、圖書館和醫院）的最佳位置是工業工程和城市規劃中的一個重要課題。這項任務涉及仔細考慮各種因素，以確保設施的高效運作和最大可達度，以滿足其預定用途。以下建模活動的主要目標是利用數學方式找出公司總部和倉庫的最佳位置。這有助於公司與旗下商店溝通，並有效地交付產品。

透過深入探究尋找公司總部和倉庫的最佳位置的複雜性，這一系列活動能帶出規劃性建模（**Prescriptive modelling**）的核心。具體而言，學生需要找到問題的「最佳」解決方案。這些活動的建模結果促進了學生之間有意義的討論和反思。在處理涉及等距和最短距離的情況時，學生需應用中點公式、距離公式和三角形中心來得出解決方案。

在數學概念之外，這種探索培養了學生的建模能力，使他們能夠作出明智的假設並認識到模型的局限性。這活動進一步擴展他們的探索，學生利用資訊科技創建總部和倉庫最佳位置的虛擬模型。數學和科技的整合不僅豐富了他們的學

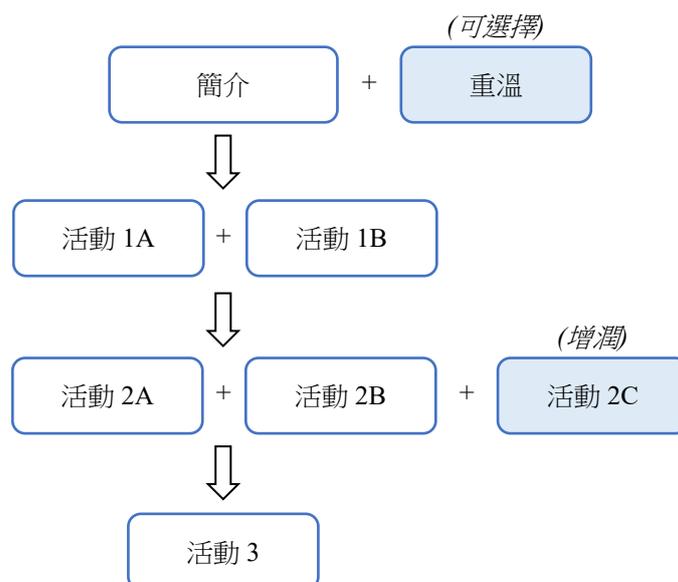
習經歷，而且展示了數學建模在日益數碼化的世界中的相關性。

活動詳情：

這資源套件共有三個主要的活動：

- 活動 1：考慮兩家商店，尋找總部（1A）和倉庫（1B）的位置。
- 活動 2：考慮三家商店，尋找總部（2A）和倉庫（2B 和 2C）的位置。
- 活動 3：創造尋找位置的虛擬模型。

因應學生的能力和校情，教師可以考慮採用以下方法制定活動計劃：



根據 Yong 等人（2015）的數學建模過程框架，下表總結了教師可以在相應問題中與學生討論的元素。

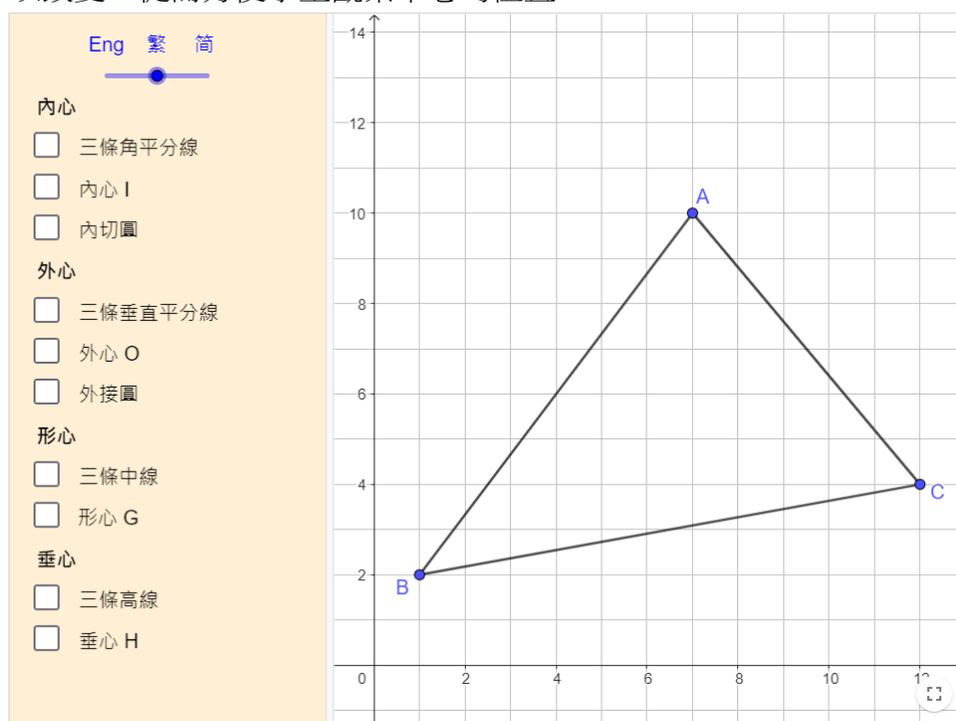
階段	元素	工作紙	工作紙	工作紙	工作紙	工作紙	工作紙
		1A	1B	2A	2B	2C	3
定義	定義感興趣的問題	封面, 1	7	1	5	7	
	確定變量和參數	6					
轉化	確定支配原則	1	7	1	5		
	作出簡化假設	5	9	3			
	構建數學模型	3					2-4
分析	選擇合適的數學工具 & 解決數學問題	2, 4	7	2	6	7	1-4
	確定或估計參數						
	驗證解決方案			2	6		
解釋	視像化解決方案	2, 4	7	2	6	7	2-4
	得出適當的結論 & 傳達結果		8	2, 4		7	

重溫（基於學生能力）

這部分回顧學生對三角形的中心的先備知識。

教學建議：

1. 在問題 1 至 4 中，教師可以回顧學生對三角形的中心的先備知識。教師可以利用以下小程式來展示三角形的特殊線和中心。A、B 和 C 的坐標可以改變，從而方便學生觀察中心的位置。



連結：<https://www.geogebra.org/m/btwzyahk>

建議答案：

1. 內心 I 是三角形的三條 角平分線 的交點。
2. 外心 O 是三角形的三條 垂直平分線 的交點。
3. 形心 G 是三角形的三條 中線 的交點。
4. 垂心 H 是三角形的三條 高線 的交點。

活動 1A (請參閱工作紙 1)

在此活動中，問題聚焦於如何找到一個總部的位置，使其到兩家不同商店的距離相同且最短。此活動讓學生在現實問題中應用中點的概念。

教學建議：

1. 在問題 1 中，教師提高學生運用數學術語表達現實世界問題的能力。教師可以透過要求學生繪畫兩個表示商店 A 和 B 的任意點來促進討論。注意，學生可能描述需求為「 $QA = QB$ 」。然而，這並不足以滿足要求，因為即使 $QA = QB$ ， A 、 Q 和 B 可能不共線。對於能力較高的學生，教師可以考慮討論 2003 年香港中學會考數學科第二卷第 31 題和 2016 年香港中學文憑試數學科（必修部分）第二卷第 26 題的圖形。

建議答案：

Q 是 A 和 B 的中點。

2. 透過從問題 1 中獲得的經驗，學生在一些具體的情況中找出總部的位置。

建議答案：

(a) $Q = (3, 2)$

(b) $Q = (4, 2)$

(c) $Q = (3, 2)$

3. 教師可以向學生介紹模型的概念。在這個情境，模型可以用來找到總部 Q 的位置。這個任務需要他們應用中點公式的知識。

建議答案：

$$Q = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

4. 問題 4(a) 讓學生應用他們所制定的模型找出總部 Q 的位置。在問題 4(b) 中，他們運用距離公式計算從 Q 到每家商店 A 和 B 的距離。

建議答案：

(a) $A = (2, 6)$ 和 $B = (10, 2)$

$$Q = \left(\frac{2+10}{2}, \frac{6+2}{2} \right) \\ = (6, 4)$$

(b) $QA = \sqrt{(2-6)^2 + (6-4)^2}$
 $= \sqrt{20}$
 $= 4.47 \text{ km}$

$$QB = QA \\ = 4.47 \text{ km}$$

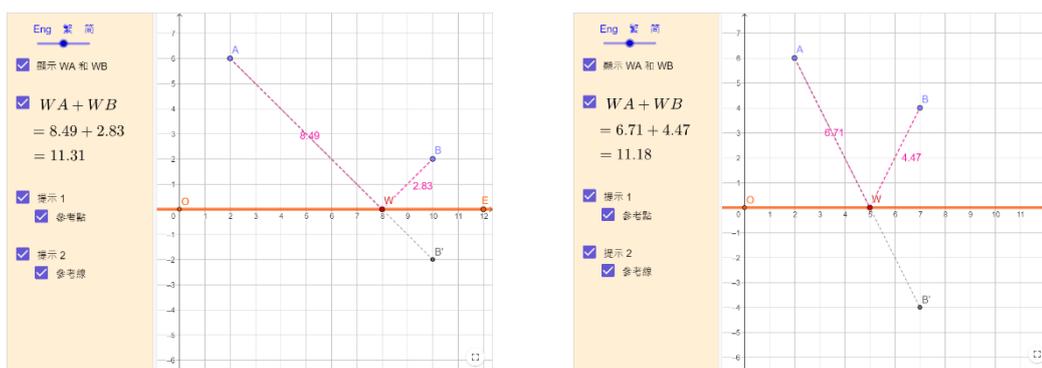
5. 在活動 1A 的尾聲，教師可以帶領學生討論所制定模型所作出了的假設。這可以提高學生在建模中作出假設的能力。以下是一些可能的討論結果。
- 2D 模型：假設地面是平的。實際上，地球的表面並不是平的。如果總部和兩家商店之間的距離非常遠，我們便需要考慮地球表面的曲率。
 - 無阻礙傳輸：沒有障礙物（例如山丘或建築物）阻礙總部和兩家商店之間的無線電波傳輸。
6. 教師可以進一步鼓勵學生討論在尋找位置時應該考慮的其他因素。這可以提高他們對於方法的可行性的意識和明辨性思考。以下是一些可能的討論結果。
- 建設的可行性：在選定的位置建造總部涉及評估該位置是否滿足必要的建築法規和環境考慮。
 - 建築成本：在選定的位置建造總部所涉及的費用，包括土地收購、建築材料和勞動力等成本。

活動 1B (請參閱工作紙 1)

在此活動中，問題聚焦於如何找到一個倉庫的位置，使其到兩家不同商店的距離最短。此活動讓學生在現實問題中應用變換一點的知識。

教學建議：

7. 教師可以透過運用以下小程式來促進學生的數學探究。 A 和 B 的坐標可以改變，從而方便他們觀察不同的情景，例如以下的情況。



連結：<https://www.geogebra.org/m/a6b9jb2g>

建議答案：

根據以上要求， $WA + WB$ 應是 最小 (或最短)。

8. 由於求 W 的坐標涉及到高中數學 (直線方程)，問題 8 僅要求學生描述找出其位置的方法。

建議答案：

首先，點 B 沿 OE 反射，得到影像 B' 。

第二，我們畫一條直線 AB' 。

然後， OE 和 AB' 的交點即為倉庫 W 的位置。

9. 與問題 6 類似，教師可以鼓勵學生在尋找倉庫位置時考慮其他可能的限制。以下是一些可能的討論結果。
- 可能的限制：在幹路旁建造倉庫的建設成本可能非常高。從城市規劃的角度而言，靠近幹路的區域可能被分配用於商業或住宅用途，而不是工業用途。
 - 為了應對這些限制，我們可以首先確定 W 的最佳位置。然後，我們可以尋找盡可能靠近最佳位置的其他可行位置。

活動 2A (請參閱工作紙 2)

與涉及兩家商店的活動 1A 類似，此活動的問題聚焦於如何找到一個總部的位
置，使其到三家不同商店的距離相同。此活動讓學生在現實問題中深入研究三
角形的外心的性質，並與三角形的其他三個中心進行比較。

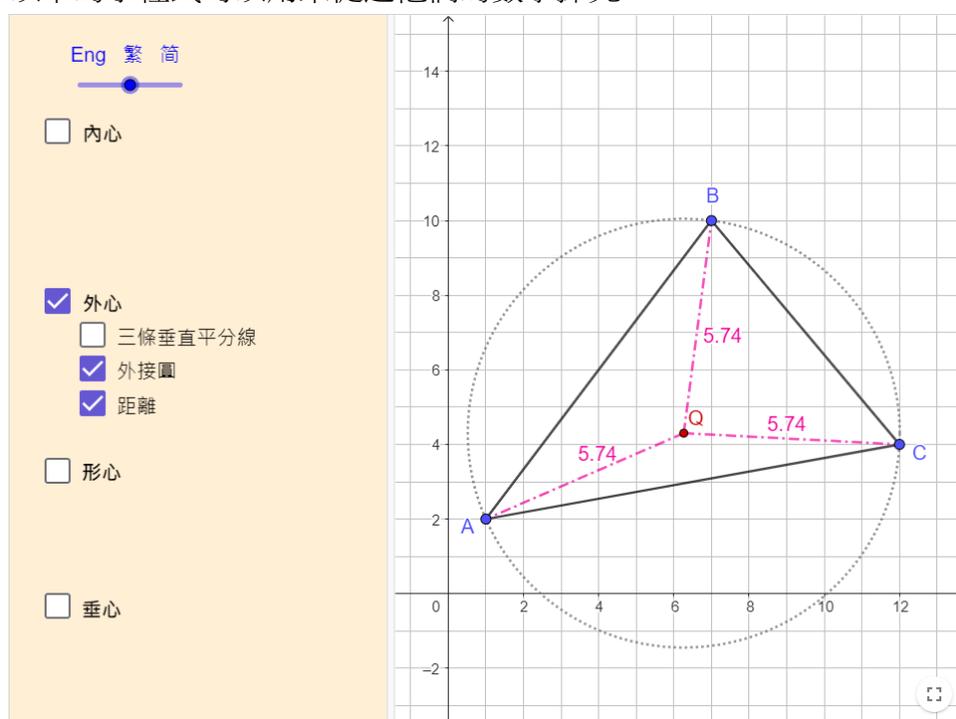
教學建議：

1. 在問題 1 中，教師提高學生運用數學術語來表述現實問題的能力。

建議答案：

$QA = QB = QC$ (或 QA 、 QB 和 QC 是相等。)

2. 基於學生對三角形中心的先備知識，他們選擇一個適合的模型來解決問題。
以下的小程式可以用來促進他們的數學探究。



連結：<https://www.geogebra.org/m/gm6ayhap>

建議答案：

你的選擇	中心	距離 (準確至最接近的 0.01 km)		
		QA	QB	QC
<input checked="" type="checkbox"/>	外心	5.74	5.74	5.74
<input type="checkbox"/>	內心	7.18	4.23	5.20
<input type="checkbox"/>	形心	6.57	4.68	5.50
<input type="checkbox"/>	垂心	8.43	2.65	5.66

3. 有了活動 1A 的經驗，學生應該更能夠識別建模時所作出的假設。以下是一些可能的討論結果，類似於活動 1A 中問題 5 的討論結果。
- 2D 模型：假設地面是平的。實際上，地球的表面並不是平的。如果總部和三家商店之間的距離非常遠，我們便需要考慮地球表面的曲率。
 - 無阻礙傳輸：沒有障礙物（例如山丘或建築物）阻礙總部和三家商店之間的無線電波傳輸。
4. 接著，教師可以促使學生考慮模型的局限性。具體而言，該模型無法保證從總部 Q 到三家商店 A 、 B 和 C 的總距離是最短的。

建議答案：

中心	距離（準確至最接近的 0.01 km）			
	QA	QB	QC	總和
內心	7.18	4.23	5.20	16.61
外心	5.74	5.74	5.74	17.22
形心	6.57	4.68	5.50	16.75
垂心	8.43	2.65	5.66	16.74

所選擇的位置（ $\triangle ABC$ 的外心）無法使得從 Q 到 A 、 B 和 C 的總距離最短。正如上表所示，該距離（外心：17.22 km）大於其他三個位置，包括 $\triangle ABC$ 的內心（16.61 km）、重心（16.75 km）和垂心（16.74 km）。

活動 2B (請參閱工作紙 2)

在此活動中，問題聚焦於如何找到一個倉庫的位置，使其到三角形的三條邊的距離相等。此活動讓學生在現實問題中深入研究三角形的內心的性質，並與三角形的其他三個中心進行比較。

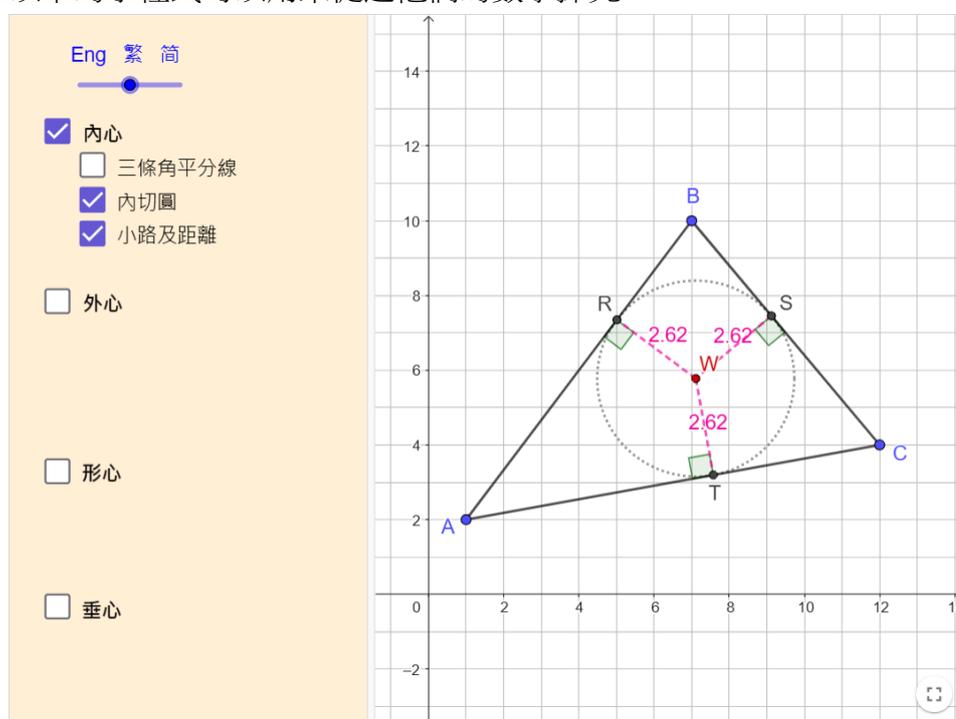
教學建議：

5. 在問題 5 中，教師提高學生使用數學術語表示現實問題的能力。

建議答案：

$WT \perp AC$ (或 WT 垂直 AC 。)

6. 基於學生對三角形中心的先備知識，他們選擇一個適合的模型來解決問題。以下的小程式可以用來促進他們的數學探究。



連結：<https://www.geogebra.org/m/bgpwnvje>

建議答案：

你的選擇	中心	距離 (準確至最接近的 0.01 km)		
		WR	WS	WT
<input checked="" type="checkbox"/>				
✓	內心	2.62	2.62	2.62
	外心	2.83	4.21	1.32
	形心	2.53	3.24	2.27
	垂心	1.94	1.30	4.15

活動 2C (請參閱工作紙 2)

這個增潤活動涉及到較新鮮的數學探究，適合能力較高的學生。在此活動中，學生探討如何在 $\triangle ABC$ 的一條邊上訂出倉庫 W 的位置。該位置應該把 WA 、 WB 和 WC 的總距離變得最小。

7. 問題 7 涉及到 $\triangle ABC$ 的不同情況。教師可以建議學生先考慮直角三角形的情況，然後是鈍角三角形，最後是銳角三角形。前兩種情況（即直角三角形和鈍角三角形）可能較簡單，因為倉庫是位於三角形的一個頂點。第三種情況（即銳角三角形）可能更具挑戰性，需要教師更多的指導。

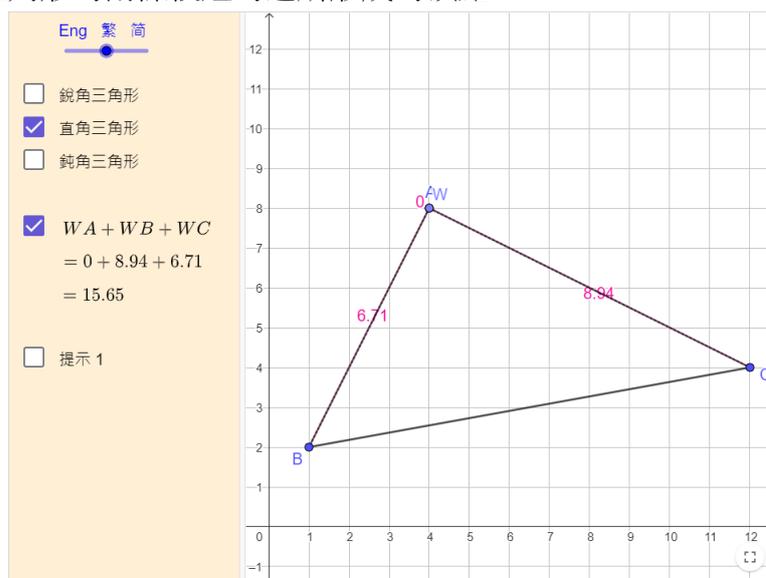
學生可以運用所提供的小程式來促進他們的數學探究：

<https://www.geogebra.org/m/gxtnz4cu>

建議答案：

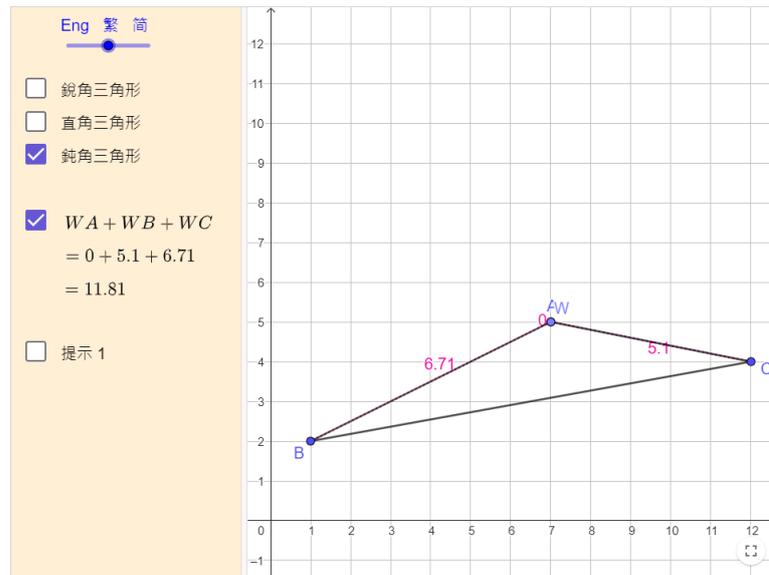
情況 I：直角三角形

W 位於三角形的兩條較短的邊所形成的頂點。



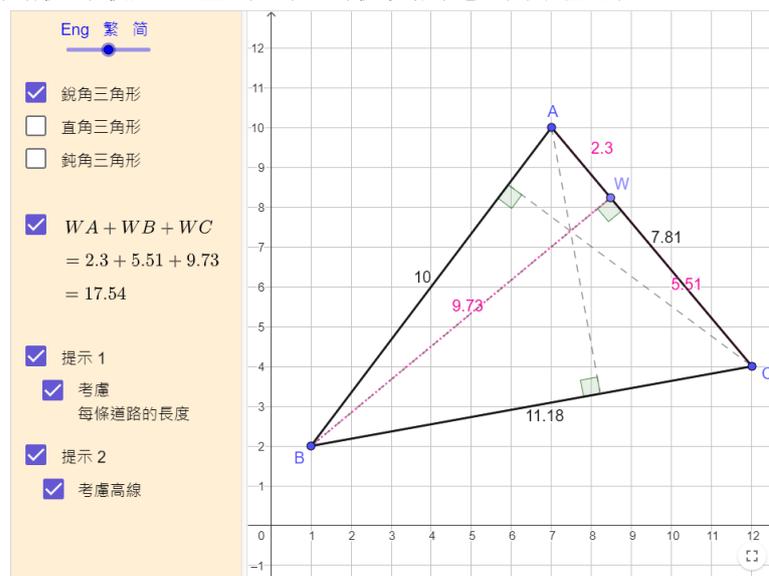
情況 II：鈍角三角形

W 位於三角形的兩條較短的邊所形成的頂點。



情況 III：銳角三角形

W 位於三角形的最短邊上的垂足（從其對應的頂點起）。



活動 3 (請參閱工作紙 3)

在這個活動中，學生將創建一個在活動 1A (兩點的中點)、2A (三角形的外心) 和 2B (三角形的內心) 中制定的虛擬模型。

教學建議：

1. 學生使用 GeoGebra 創造虛擬的模型。
<https://www.geogebra.org/classic> 是 GeoGebra 的線上應用程式。教師和學生也可以在電腦上安裝 GeoGebra。
請到：<https://www.geogebra.org/download>
2. 遵循逐步的指示，學生創造一個虛擬模型來找出在活動 1A 總部 Q 的位置，即商店 A 和 B 的中點。在創建過程中，教師可以回顧中點的概念，以及在建模中所牽涉的假設。
3. 遵循逐步的指示，學生創造一個虛擬模型來找出在活動 2A 總部 Q 的位置，即商店 A 、 B 和 C 的外心。在創建過程中，教師可以回顧三角形的外心的性質，以及在建模中所牽涉的假設。
4. 遵循逐步的指示，學生創造一個虛擬模型來找到在活動 2B 倉庫 W 的位置，即商店 A 、 B 和 C 的內心。在創建過程中，教師可以回顧三角形的內心的性質，以及在建模中所牽涉的假設。

參考文獻：

- Yong, D., Levy, R., & Lape, N. (2015). Why no difference? A controlled flipped classroom study for an introductory differential equations course. *PRIMUS*, 25(9–10), 907–921.

建議的教案和教學流程

教學時間：70 分鐘或雙課節

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
10	<ul style="list-style-type: none"> 引起學生興趣 回顧先備知識 	<ol style="list-style-type: none"> 教師透過討論現實情境來引起學生的興趣。 教師回顧學生對三角形的中心的先備知識。 	<p>WS 封面</p> <p>WS 重溫 Q1-4</p>
15	<ul style="list-style-type: none"> 應用中點的概念 介紹模型的概念 應用所制定的模型 提升學生在建模中作出假設和認出其他因素的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 教師提高學生運用數學術語表達現實世界問題的能力。 教師透過要求學生繪畫兩個表示商店 A 和 B 的任意點來促進討論。 學生在一些具體的情況中找出總部的位置。 教師向學生介紹模型的概念。 學生應用中點公式的知識來建模。 學生應用他們所制定的模型找出總部 Q 的位置。 學生運用距離公式計算從 Q 到每家商店 A 和 B 的距離。 教師帶領學生討論所制定模型所作出的假設。 教師鼓勵學生討論在尋找位置時應該考慮的其他因素。 	<p>WS1A Q1-2</p> <p>WS1A Q3</p> <p>WS1A Q4</p> <p>WS1A Q5-6</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> 應用變換一點的知識 提升學生在建模中認出可能限制的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 教師透過運用所提供的小程式來促進學生的數學探究。 學生描述找出倉庫位置的方法。 教師鼓勵學生在尋找倉庫位置時考慮其他可能的限制。 	<p>WS1B Q7-8</p> <p>WS1B Q9</p>

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
10	<ul style="list-style-type: none"> 深入研究三角形的外心的性質 提升學生在建模中作出假設和認出局限的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 教師提高學生運用數學術語來表述現實問題的能力。 學生選擇一個適合的模型（從三角形的四個中心）來解決問題。 學生運用所提供的小程式來促進他們的數學探究。 教師帶領學生討論所制定模型所作出的假設。 教師促使學生考慮模型的局限性。 	<p>WS2A Q1–2</p> <p>WS2A Q3–4</p>
10	<ul style="list-style-type: none"> 深入研究三角形的內心的性質 在不同的情況下找出最佳的解決方案 	<ol style="list-style-type: none"> 教師提高學生運用數學術語來表述現實問題的能力。 學生選擇一個適合的模型（從三角形的四個中心）來解決問題。 教師透過運用所提供的小程式來促進學生的數學探究。 學生描述在不同的情況下找出倉庫位置的方法。 	<p>WS2B Q5–6</p> <p>WS2C Q7</p>
15	<ul style="list-style-type: none"> 創建在此活動中所制定的虛擬模型 總結活動 	<ol style="list-style-type: none"> 學生創造一個在活動 1A 中的虛擬模型（兩點的中點）。 教師回顧中點的概念，以及在建模中所牽涉的假設。 學生創造一個在活動 2A 中的虛擬模型（三角形的外心）。 教師回顧三角形的外心的性質，以及在建模中所牽涉的假設。 學生創造一個在活動 2B 中的虛擬模型（三角形的內心）。 教師回顧三角形的內心的性質，以及在建模中所牽涉的假設。 	<p>WS3 Q1–4</p>